

DERIVÁCIE A INTEGRÁLY

LIMITA FUNKCIE

1. Vypočítajte:

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x+7}{x^2-x+2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \frac{p}{3}} \sin \frac{x}{2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^3+125}{x^2+4x-5}$$

2. Vypočítajte:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\cos^2 x \cdot \sin x}{7x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$$

3. Vypočítajte:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2-x+1}{7-2x^2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+5}{4x^3+x-1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3+x+1}{x^2+7}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{4x^2-1}}$$

4. Vypočítajte:

$$a) \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x+5}{\sqrt{x+9}-2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 25} \frac{\sqrt{x}-5}{x-25}$$

5. Vypočítajte:

$$a) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2+5x-2}{4x^2+9x+2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^3-3x^2+x+1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \frac{p}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \cot gx}$$

6. Daná je funkcia $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-x-2}$. Vypočítajte:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

7. Vypočítajte:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3-2x+18}{3x^2+1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3-2x+18}{1-3x^2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3-2x+18}{1-3x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-2x^2}{4x^3-4x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 + 5)$$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - x^4)$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + 5)$$

$$h) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - x^4)$$

8. Vypočítajte:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{10+x}-3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x - 1} - x)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cot gx$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 4x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x - 1}{x}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x}$$

DOTYČNICA

1. Napíšte rovnicu dotyčnice krivky $y = f(x)$ v bode A , ak

$$a) f(x) = x^2, A[2,4]$$

$$b) f(x) = x^3, A[1,1]$$

$$c) f(x) = x^2, A[x, x_0]$$

$$d) f(x) = x^2 + x + 1, A[1,3]$$

$$e) f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1, A[2, y_1]$$

2. Napíšte rovnicu dotyčnice a normály (priamka kolmá na dotyčnicu v bode dotyku) funkcie $y = f(x)$ v bode T , ak:

$$a) f : y = \frac{x+2}{x-2}, T[1, ?]$$

$$b) f : y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, T\left[\frac{p}{2}, ?\right]$$

3. Určte, v ktorom bode je dotyčnica funkcie $y = x^3 - 2$ rovnobežná s

$$a) \text{ priamkou } p: 3x - y + 1 = 0$$

$$b) \text{ osou } x..$$

4. Určte rovnicu dotyčnice a normály funkcie $y = f(x)$ v bode T , ak:

$$a) f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5, T[2,1]$$

$$b) f(x) = x - \operatorname{tg} x, T\left[\frac{p}{3}, ?\right]$$

$$c) f(x) = e^{-x} \cdot \cos 2x, T[0, ?]$$

5. Určte rovnicu dotyčnice a normály funkcie $f(x) = x^2 - 2x + 3$ v bode, v ktorom smernica dotyčnice $k = -1$.

DERIVÁCIA

1. Na základe definície derivácie funkcie dokáž, že pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

a) $(x^2)' = 2x$

b) $(3x+1)' = 3$

c) $(\pi-1)' = 0$

2. Vypočítajte deriváciu funkcie:

a) $y = 5x^7 - 3x^4 + x^2 - 1$

b) $y = x^2(x^2 + 1)(x - 1)$

c) $y = \cos x - x \sin x$

d) $y = \frac{x^2 \sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[3]{x^2}}$

e) $y = \frac{5x - 2\sqrt{x^3}}{x^2}$

3. Určte deriváciu funkcie:

a) $y = (7 - 3x^2)1996$

b) $y = \cos 2x^3 - \sin^3 2x$

c) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

d) $y = (x^2 + 1)e^{x^2+1}$

4. Určte deriváciu funkcie:

a) $y = x^2 \sqrt{x^2 + 1}$

b) $y = \ln \frac{3}{x+2}$

c) $y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

5. Nech $s = s(t) = At^2 + Bt$ je dráha, ktorú za čas t prejde hmotný bod, pričom $A = 1 \text{ m.s}^{-2}$, $B = 3 \text{ m.s}^{-1}$. Vypočítajte okamžitú rýchlosť hmotného bodu v čase $t = 2 \text{ s}$.

6. Určte deriváciu funkcie:

a) $f(x) = (x^2 - 2x + 3)^3$, $g(x) = \frac{1}{(2x^4 - 1)^4}$, $h(x) = \sqrt{2x^2 - 1}$

b) $f(x) = (4x^3 + 1)(2x^2 + 1)$, $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$, $h(x) = \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

c) $f(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$, $g(x) = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$, $h(x) = \cot gx^2$, $m(x) = \frac{2 \cos x + \cos x \cdot \sin^2 x}{3}$

7. Daná je funkcia $f(x) = x^{\ln x}$. Riešte nerovnicu $f'(x) \leq 0$ v množine $\mathbb{R}$.

DERIVÁCIA FUNKCIE A SPOJITOSŤ

1. Na základe definície spojitosti funkcie dokážte, že funkcia f je spojitá v bode a :

a) $f: y = 7$, pre $x \in \mathbb{R}$

b) $f: y = 2x + 1$, pre $x \in \mathbb{R}$

2. Na základe znalosti príslušných viet o spojitosti funkcie odôvodnite spojitost nasledujúcich funkcií v každom bode $x \in \mathbb{R}$:

a) $f: y = x - 5 + 7 \sin x$

b) $f: y = 5 \cos^3 x + 1$

c) $f: y = 7x \cos x + |x|$

$$d) f: y = (x^2 + 1)^3$$

$$e) f: y = 5\sin(7x - 1) - 3$$

$$f) f: y = \frac{x-1}{x^2+5}$$

3. Riešte na množine $\mathbb{R}$:

$$a) \frac{x^3 + x^2}{3-x} \leq 0$$

$$b) x \ln x + 2 \ln x > 0$$

4. Určte body nespojitosti funkcií:

$$a) f: y = \frac{3x}{x^2 + x - 2}$$

$$b) f: y = \frac{2x-1}{x^3+8}$$

$$c) f: y = \frac{x^2 - x}{x^2 + x - 2}$$

$$d) f: y = \frac{7x+3}{5\sin x}$$

$$e) f: y = \frac{2x}{\ln x - 3}$$

$$f) f: y = \frac{5}{\cos^2 x - \cos x}$$

PRIEBEH FUNKCIE

1. Zistite intervaly monotónnosti funkcií

$$a) f: y = x^3 + 6x^2 - 15x$$

$$b) f: y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$$

$$c) f: y = e^{-x^2}$$

$$d) f: y = \ln^2 x - \ln x^2$$

2. Nájdite lokálne extrémny funkcií:

$$a) f: y = x^3 + 12x^2 + 36x - 4$$

$$b) f: y = x^3 + x + 1$$

$$c) f: y = x + \frac{4}{x}$$

$$d) f: y = \ln^2 x$$

3. Vyšetrite priebeh funkcie:

$$a) f: y = x^3 + 3x^2 - 9x - 2$$

$$b) f: y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$c) f: y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$d) f: y = 1 + \frac{1}{x^2 - 4}$$

4. Vyšetrite intervaly monotónnosti funkcií a určte ich lokálne extrémny:

$$a) f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 3$$

$$b) f(x) = 9 \cdot \frac{x^2 - 3}{x^3}$$

$$c) f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$$

5. Vyšetrite priebeh funkcie a načrtnite graf funkcie:

$$a) f(x) = x^4 - 8x^3 + 16x^2$$

$$b) f(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$c) f(x) = 12 \cdot \frac{x+2}{x^2}$$

$$d) f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

$$e) f(x) = \frac{x^2}{x-2}$$

$$f) f(x) = x \ln^2 x$$

6. Určte globálne extrémny funkcie $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$ na intervaloch: $M_1 = \langle -2, 3 \rangle$, $M_2 = (-2, 3)$, $M_3 = (-1, 3)$.

7. Nájdite pravouhlý rovnobežník, ktorý pri danom obvode má maximálny obsah.

8. Do daného rovnoramenného trojuholníka vpíšte pravouhlý rovnobežník s maximálnym obsahom.

PRIMITÍVNA FUNKCIA

1. Dokážte, že funkcie $F : y = \cos x + \frac{1}{\cos x} + 7$ a $G : y = \frac{\sin^2 x + 2 \cos^2 x}{\cos x} - 1$ sú primitívne

funkcie k funkcii $f : y = \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}$ $x \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ (2k-1)\frac{\pi}{2} \right\}$.

2. Určte:

$$a) \int (5x^4 - x^3 + 7x^2 - 3) dx$$

$$b) \int (x+3)^2 (x^2-3) dx$$

$$c) \int \frac{x^7 \sqrt[3]{x^2}}{2\sqrt{x}} dx$$

$$d) \int \frac{5x - 3\sqrt[4]{x^3}}{x^3} dx$$

3. Určte:

$$a) \int (4x^7 - e^x + 5 \sin x - 3) dx$$

$$b) \int \cot g^2 x dx$$

$$c) \int (kx - a^2 x^2 + a \cos x + k - a - 1) da$$

4. Určte:

$$a) \int (7x-2)^6 dx$$

$$b) \int x(x^2+3)^5 dx$$

$$c) \int \sin\left(\frac{2}{3}x-1\right) dx$$

$$d) \int \cos^4 x \cdot \sin x dx$$

$$e) \int \cot gx dx$$

$$f) \int \frac{7}{3x+5} dx$$

5. Určte:

$$a) \int x \cdot e^x dx$$

$$b) \int \ln x dx$$

$$c) \int x^2 \cdot \sin x dx$$

6. Určte:

$$a) \int (2x-3)^3 dx$$

$$b) \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) dx$$

$$c) \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}} dx$$

$$d) \int \cos \frac{x}{2} dx$$

7. Určte:

$$a) \int (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx$$

$$b) \int 3x \sqrt{1+x^2} dx$$

$$c) \int \operatorname{tg}^2 x dx$$

$$d) \int \cos^2 x dx$$

$$e) \int \ln x dx$$

$$f) \int x^2 \sin x dx$$

URČITÝ INTEGRÁL

1. Vypočítajte:

$$a) \int_1^4 \left(3x + \frac{1}{x^2} - x\sqrt{x} \right) dx$$

$$b) \int_0^{\frac{p}{4}} \frac{1 + \cos^2 x}{\sin^2 x} dx$$

$$c) \int_1^e x \cdot \ln x dx$$

2. Určte obsah obrazca ohraničeného krivkami:

$$a) y = -x^2 + 2, y = 0, x = 0, x = 3$$

$$b) y = x^2 - 4, y = x + 2$$

$$c) y = \cos \frac{x}{2}, y = 0, x = -\frac{p}{2}, x = p$$

$$d) y = \frac{1}{2}x^2 + 1, y = -x + 5, y = 0, x = 0, x = 4$$

3. Vypočítajte objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou obrazca ohraničeného krivkami s rovnicami $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$, $y = -x + 5$ okolo osi x .

4. Vypočítajte objem telesa vzniknutého rotáciou oblasti ohraničenej krivkami $y = x^2$, $y = \sqrt{-x}$ okolo osi x .

5. Odvodte vzorec pre výpočet objemu:

a) gule s polomerom r

b) rotačného kužela s polomerom podstavy r a výškou v

6. Vypočítajte:

$$a) \int_0^{\frac{p}{2}} \cos x dx$$

$$b) \int_1^4 \frac{dx}{x^2}$$

$$c) \int_{-2}^2 \left(x + \frac{1}{x} \right) dx$$

$$d) \int_0^2 x \sqrt{4-x^2} dx$$

$$e) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$$

$$f) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^2 x dx$$

7. Vypočítajte obsah obrazca ohraničeného krivkami:

$$a) f(x) = 2x + 1, \quad g(x) = 4x^2 - 8x + 5$$

$$b) f(x) = \frac{2}{9}x^2 + 4, \quad g(x) = \frac{4}{9}x^2 + 2$$

$$c) f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x, \quad g(x) = 0$$

$$d) f(x) = \ln x, \quad g(x) = 0, \quad x \in \langle e, e^2 \rangle$$

8. Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti ohraničenej krivkami okolo osi x:

$$a) y^2 = 2x, \quad y = 0, \quad x = 4$$

$$b) y = 1 - x^2, \quad y = x^2$$

$$c) xy = 4, \quad y = 0, \quad x \in \langle 1, 4 \rangle$$